スタディサプリ　センター数学ⅡＢについて

この講座は,「平成 26・28・29・30 年度　大学入試センター試験　追試験」をベースに,大学入学共通テストの数学の学習を進める上で土台となる「誘導形式のマーク式試験を解くために必要な力とは何か」をお伝えするための講座です。

センター数学は，その答える形式はマークではあるものの，そこに至るまでに必要な力は，記述試験と遜色ありません。また，決して長いとは言えない試験時間内に確実に解答に至るために，迷いや遠回りがほぼ許されないという点では，ある意味，記述試験より厳しい試験と言えます。一見して親切に見える誘導も，あなたにやってほしいすべてのことを伝えてくれているわけではなく,「流れ」を理解し，省略されているプロセスや途中計算を補いながら，必要に応じてあなた自身で解答を作っていく，そんな試験です。ゆえに，数学に関しては，記述力がある人でもセンターで点数がとれない，ということが起こりうるのです。

この講座を受けていただく時点でのあなたの実力が，大学入学共通テストを読み解くために必要な土台となる力に対して，どこまで到達し，上回り，また下回っているかについて，予習と講義動画を通じて分野別に整理することで，あなたの今後の学習の指針となるでしょう。

この講座をきっかけとし，さらに思考力・判断力・表現力を磨くための学習に進むべきか，単元・項目ベースの基本に戻るべきか，それを把握して学習を進めることが，大学入学共通テストのみで数学を使う人はもちろん，個別選抜で数学を使う人にとっても，実力向上のカギとなります。あなたに必要な，あなただけのカギ，ぜひこの講座で発見してください。

山内　恵介

― 目次 ―

第１講（１日目）　**指数関数・対数関数・図形と方程式**
第２講（２日目）　**三角関数**
第３講（３日目）　**微分法・積分法**
第４講（４日目）　**数列**
第５講（５日目）　**ベクトル**

※該当する講の「予習」を，ノート等に必ず行ってから授業に臨んで下さい。
当日の授業は，予習を行っていることを前提に行われます。

第１講　指数関数・対数関数・図形と方程式

1　a を定数とする。x の方程式

$$4^{x+a}-2^{x+a}+a=0 \quad \cdots\cdots①$$

がただ一つの解をもつとき，その解を求めよう。

(1)　$X=2^x$ とおくと，X のとり得る値の範囲は［ア］である。［ア］に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪　$X\geqq 0$　　①　$X>0$　　②　$X\geqq 1$　　③　$X>1$

また，①を X を用いて表すと，X の２次方程式

$$2^{\boxed{イウ}}X^2-2^{\boxed{エ}}X+a=0 \quad \cdots\cdots②$$

となる。この２次方程式の判別式を D とすると

$$D=2^{\boxed{イウ}}(\boxed{オ}-\boxed{カ}a)$$

である。

（次ページに続く）

(2)　$a=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき，②は $\boxed{\text{ア}}$ の範囲でただ一つの解をもつ。したがって，①もただ一つの解をもち，その解は $x=\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(3)　$a\neq\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき，②が $\boxed{\text{ア}}$ の範囲でただ一つの解をもつための必要十分条件は，$\boxed{\text{コ}}$ である。$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　$a>0$　　①　$a<0$

②　$a\geqq 0$　　③　$a\leqq 0$

④　$a>\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$　　⑤　$a<\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$

$\boxed{\text{コ}}$ のとき，①もただ一つの解をもち，その解は

$x=\boxed{\text{サ}}a-\boxed{\text{シ}}+\log_2\left(\boxed{\text{ス}}+\sqrt{\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{カ}}a}\right)$

である。

2　$x>1$，$y>0$ の範囲にある x，y が

$(2y)^{\log_4 x}=16$　……………………………①

を満たすとき，$A=x\sqrt{y}$ の最小値を求めよう。

$s=\log_2 x$，$t=\log_2 y$ とおく。x が $x>1$ の範囲にあるとき，s のとり得る値の範囲は $s>$ **ア** である。また，$\log_2 A$ を s と t を用いて表すと

$\log_2 A=s+\dfrac{t}{\boxed{イ}}$　……………………………②

である。

底の変換公式により

$\log_4 x=\boxed{ウ}\,s$　……………………………③

が成り立つ。**ウ** に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪　$-\dfrac{1}{4}$　　①　$-\dfrac{1}{2}$　　②　-2　　③　-4

④　$\dfrac{1}{4}$　　⑤　$\dfrac{1}{2}$　　⑥　2　　⑦　4

（次ページに続く）

①の両辺の 2 を底とする対数をとると，③により

$$s(t+\boxed{エ})=\boxed{オ} \quad \cdots\cdots ④$$

が成り立つ。②，④により，$\log_2 A$ を s を用いて表すと

$$\log_2 A=s+\frac{\boxed{カ}}{s}-\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$$

となる。

$s>\boxed{ア}$ であることに注意すると，$\log_2 A$ は $s=\boxed{ケ}$ のとき最小値をとることがわかる。

したがって，A は $x=\boxed{コ}$，$y=\boxed{サ}$ のとき，最小値 $\boxed{シ}\sqrt{\boxed{ス}}$ をとる。

3 座標平面上に原点Oを中心とする半径2の円 C と点A(4, 3)がある。

(1) 点Pが C 上を動くとき，線分APを2：1に内分する点Qの軌跡を求めよう。

円 C の方程式は

$$x^2+y^2=\boxed{\text{ア}} \qquad \cdots\cdots ①$$

である。Pの座標を $(s,\ t)$，Qの座標を $(x,\ y)$ とすると，QはAPを2：1に内分するので

$$x=\frac{\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}s}{\boxed{\text{エ}}},\quad y=\frac{\boxed{\text{オ}}+\boxed{\text{ウ}}t}{\boxed{\text{エ}}}$$

が成り立つ。よって，x，y は

$$\left(x-\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)^2+(y-\boxed{\text{ク}})^2=\left(\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たし，点Qの軌跡は $\left(\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}},\ \boxed{\text{ク}}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ の円である。この円を C' とする。

（次ページに続く）

(2)　円 C と円 C' の二つの交点と原点 O を頂点とする三角形の面積 S を求めよう。

C と C' の二つの交点を通る直線を ℓ とする。C と C' の交点の座標 $(x,\ y)$ は，等式①と②を満たす。これらの差をとることにより得られる等式は

$$\boxed{\text{サ}}\,x+\boxed{\text{シ}}\,y=15$$

であり，これが ℓ の方程式である。また，O と ℓ の距離は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

したがって，$S=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。

第２講　三角関数

1　$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ および関係式

$$2\cos^2(\beta-\alpha)=3\sin(\beta-\alpha) \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす α，β に対して，$y=4\sin^2\beta-4\cos^2\alpha$ とおく。

(1)　$t=\sin(\beta-\alpha)$ とおくと，①から $t=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ であることがわかる。

$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{\boxed{ウ}}$ である。

（次ページに続く）

(2)　(1)により $\beta=\alpha+\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}$ であるから，加法定理を用いて，y を α で表すと

$$y=\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}\cos^2\alpha+\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\sin\alpha\cos\alpha \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots② $$

となる。このことから，$y=\boxed{\text{エ}}$ となるのは，$\alpha=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ク}}}$，$\beta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ケ}}}$

のときである。

(3)　2 倍角の公式を用いると，②は

$$y=\sqrt{\boxed{\text{コ}}}\sin 2\alpha-\boxed{\text{サ}}\cos 2\alpha$$

となる。さらに，三角関数の合成を用いると

$$y=\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セ}}}\right)$$

と変形できる。このことから，$y=-\sqrt{3}$ となるのは，$\alpha=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ソタ}}}$，$\beta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{チ}}}$

のときである。

2　$p=\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$，$q=\sin\left(\theta+\dfrac{4}{3}\pi\right)$ とおく。

(1)　三角関数の加法定理により

$$p=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\sin\theta+\frac{\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}\cos\theta \quad\cdots\cdots①$$

$$q=\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}\sin\theta-\frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}\cos\theta \quad\cdots\cdots②$$

である。

(2)　①，②により

$$pq=\sin^2\theta-\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \quad\cdots\cdots③$$

$$=\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\cos 2\theta-\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$$

である。

(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で $pq=0$ となる θ は $\boxed{\text{ツ}}$ 個あり，そのような θ のうちで最小のものは $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

（次ページに続く）

(4)　$A=\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q}$ とおく。$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{\boxed{テ}}$ の範囲で $A=-4$ を満たす θ を求めよう。

$r=\sin\theta$ とおく。p^2+q^2 を r を用いて表すと，①，②により

$$p^2+q^2=-r^2+\frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$$

である。また，pq を r を用いて表すと，③により

$$pq=r^2-\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$$

である。従って，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{\boxed{テ}}$ の範囲で $A=-4$ を満たす θ は

$$\theta=\frac{\pi}{\boxed{ニ}}$$

である。

また，$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{ニ}}$ のとき，p，q，r の間には大小関係 $\boxed{ヌ}$ が成り立つ。

$\boxed{ヌ}$ に当てはまるものを，次の⓪〜⑤のうちから一つ選べ。

⓪　$p<q<r$	①　$p<r<q$	②　$q<p<r$
③　$q<r<p$	④　$r<p<q$	⑤　$r<q<p$

第３講　微分法・積分法

1　a を正の整数とし，放物線 $y=3x^2$ を C_1，放物線 $y=2x^2+a^2$ を C_2 とする。C_1 と C_2 の二つの共有点を x 座標の小さい順に A，B とする。また，C_1 と C_2 の両方に第 1 象限で接する直線を ℓ とする。

(1)　B の座標を a を用いて表すと $\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}}a^{\boxed{\text{ウ}}}\right)$ である。

直線 ℓ と二つの放物線 C_1，C_2 の接点の x 座標をそれぞれ s，t とおく，ℓ は $x=s$ で C_1 と接するので，ℓ の方程式は

$$y=\boxed{\text{エ}}sx-\boxed{\text{オ}}s^{\boxed{\text{カ}}}$$

と表せる。同様に，ℓ は $x=t$ で C_2 と接するので，ℓ の方程式は

$$y=\boxed{\text{キ}}tx-\boxed{\text{ク}}s^{\boxed{\text{カ}}}+a^2$$

とも表せる。これらにより，s，t は

$$s=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}a,\quad t=\frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{サ}}}a$$

である。

放物線 C_1 の $s\leqq x\leqq \boxed{\text{ア}}$ の部分，放物線 C_2 の $\boxed{\text{ア}}\leqq x\leqq t$ の部分，x 軸，および 2 直線 $x=s$，$x=t$ で囲まれた図形の面積は

$$s=\frac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}-\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a^{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

（次ページに続く）

(2)　実数 p，q，r に対し，関数 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ を考える。$f(x)$ は $x=-4$ で極値をとるとする。また，曲線 $y=f(x)$ は点 A，B および原点を通るとする。

このとき，$p=$ [チ]，$q=$ [ツテト]，$r=$ [ナ] であり，$f(x)$ の極小値は [ニヌネ] である。

また，$a=$ [ノ] $\sqrt{[ハ]}$ であり，曲線 $y=f(x)$ と放物線 C_2 の共有点のうち，A，B と異なる点の座標は ([ヒフ]，[ヘホ]) である。

2　関数 $f(x)=x^3-5x^2+3x-4$ について考える。

(1)　関数 $f(x)$ の増減を調べよう。$f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=\boxed{ア}x^2-\boxed{イウ}x+\boxed{エ}$$

であり，$f(x)$ は $x=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ で極大値，$x=\boxed{キ}$ で極小値をとる。よって，$x\geqq 0$ の範囲における $f(x)$ の最小値は $\boxed{クケコ}$ である。

また，方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数は $\boxed{サ}$ 個である。

(2)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線を ℓ とすると，ℓ の方程式は $y=\boxed{シ}x-\boxed{ス}$ である。また，放物線 $y=x^2+px+q$ を C とし，C は点 $(a,\ \boxed{シ}a-\boxed{ス})$ で ℓ と接しているとする。このとき，p，q は a を用いて

$$p=\boxed{セソ}a+\boxed{タ},\quad q=a^{\boxed{チ}}-\boxed{ツ}$$

と表される。

（次ページに続く）

(3)　(2)の放物線 C は，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲では，x 軸とただ１点 $(\beta,\ 0)$ で交わり，$0<\beta<1$ であるとする。このとき，$g(x)=x^2+px+q$ とおけば

$$g(0)g(1)=a(a+\boxed{\text{テ}})(a-\boxed{\text{ト}})^2<0$$

である。$(a-\boxed{\text{ト}})^2$ は負にならないので，a の値の範囲は $\boxed{\text{ナニ}}<a<\boxed{\text{ヌ}}$ であり，$g(0)\ \boxed{\text{ネ}}\ 0$，$g(1)\ \boxed{\text{ノ}}\ 0$ である。ただし，$\boxed{\text{ネ}}$ と $\boxed{\text{ノ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つずつ選べ。同じものを選んでもよい。

⓪　$<$　　　①　$=$　　　②　$>$

放物線 C の $0 \leqq x \leqq \beta$ の部分と，x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を S とする。また，C の $\beta \leqq x \leqq 1$ の部分と，x 軸および直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積を T とする。このとき，a の値によらず，$\int_0^1 g(x)dx=\boxed{\text{ハ}}$ が成り立つ。

$\boxed{\text{ハ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪　$S+T$　　①　$\dfrac{S+T}{2}$　　②　$2S+T$　　③　$2T+S$

④　$S-T$　　⑤　$T-S$　　⑥　$2S-T$　　⑦　$2T-S$

したがって，$S=T$ となる a の値を求めると，$a=\dfrac{\boxed{\text{ヒ}}-\sqrt{\boxed{\text{フヘ}}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

第４講　数列

1　s を定数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定義する。

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=\frac{2a_n+s}{a_n+2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\ \cdots\cdots①$$

(1)　$s=4$ とする。$a_2=$ **ア** ，$a_{100}=$ **イ** である。

(2)　$s=0$ とする。$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_1=$ **ウ** である。さらに，b_n と b_{n+1} は関係式 $b_{n+1}=b_n+\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ を満たすから，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\frac{\boxed{カ}}{n+\boxed{キ}}$$

である。

(3)　$s=1$ とする。$c_n=\dfrac{1+a_n}{1-a_n}$ とおくと，$c_1=$ **ク** である。さらに，c_n と c_{n+1} の関係式を求め，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めることにより，$\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\boxed{ケ}-\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}^{\boxed{シ}}+1}$$

であることがわかる。ただし，**シ** については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪　$n-2$　　①　$n-1$　　②　n　　③　$n+1$　　④　$n+2$

（次ページに続く）

(4)　(3)の数列 $\{c_n\}$ について

$$\sum_{k=1}^{n} c_k c_{k+1} = \frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\left(\boxed{\text{タ}}^{\,n}-1\right)$$

である。

次に，(3)の数列 $\{a_n\}$ について考える。$s=1$ であることに注意して，①の漸化式を変形すると

$$a_n a_{n+1} = \boxed{\text{チ}}\,(a_n - a_{n+1}) + \boxed{\text{ツ}}$$

である。ゆえに

$$\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1} = \boxed{\text{テ}} + \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{サ}}^{\boxed{\text{ナ}}} + \boxed{\text{ニ}}}$$

である。ただし，$\boxed{\text{テ}}$ と $\boxed{\text{ナ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。同じものを選んでもよい。

⓪　$n-2$　　①　$n-1$　　②　n　　③　$n+1$　　④　$n+2$

2　次の(Ⅰ)，(Ⅱ)で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

(Ⅰ)　$a_1=1$，$a_2=4$

(Ⅱ)　$n=1$，2，3，…に対して

$(n+1)a_{n+2}-(3n+2)a_{n+1}+2na_n=4n+2$　……………①

である。

(1)　$a_3=$ アイ である。

(2)　$\{a_n\}$ の一般項，および初項から第 n 項までの和 S_n を求めよう。

①の左辺は

$(n+1)a_{n+2}-(3n+2)a_{n+1}+2na_n$

$=(n+1)(a_{n+2}-$ ウ $a_{n+1})-n(a_{n+1}-$ ウ $a_n)$

となる。よって

$(n+1)(a_{n+2}-$ ウ $a_{n+1})-n(a_{n+1}-$ ウ $a_n)=4n+2$

である。したがって，$b_n=n(a_{n+1}-$ ウ $a_n)$ とおくと，$\{b_n\}$ の階差数列は初項 エ ，公差 オ の等差数列であり，$\{b_n\}$ の一般項は $b_n=$ カ $n^{\text{キ}}$ である。ゆえに

$a_{n+1}-$ ウ $a_n=\dfrac{1}{n}\cdot$ カ $n^{\text{キ}}$　……………………②

を得る。

（次ページに続く）

$c_n = a_{n+1} - a_n$ とおくと，②から，$c_{n+1} -$ [ウ] $c_n =$ **[ク]** である。

$c_{n+1} +$ **[ケ]** $=$ [ウ] $(c_n +$ [ケ] $)$ により，数列 $\{c_n +$ [ケ] $\}$ は

初項 **[コ]**，公比 [ウ] の等比数列である。

したがって，$\{a_n\}$ の一般項は

$a_n =$ **[サ]** ・ **[シ]** $^{\boxed{ス}}$ $-$ **[セ]** $n -$ **[ソ]**

である。ただし，**[ス]** については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪　$n-2$　　①　$n-1$　　②　n　　③　$n+1$　　④　$n+2$

また，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$S_n =$ **[タ]** ・ **[チ]** $^{\boxed{ツ}}$ $- n^2 -$ **[テ]** $n -$ **[ト]**

である。ただし，**[ツ]** については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪　$n-2$　　①　$n-1$　　②　n　　③　$n+1$　　④　$n+2$

第５講　ベクトル

[1] 平面上に，1辺の長さが1の正方形ABCDと，その外側に三角形OABがあり，

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ とする。$0<t<1$ とし，線分OA，AD，CBを $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれP，Q，Rとする。以下では，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=$ [ア] により，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{[イ]}{[ウ]}$ である。また，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は平行であり，$|\vec{a}+\vec{b}|=$ [エ] により，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{[オ]}{[カ]}(\vec{a}+\vec{b})$ である。

次に，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を t と $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{[キ]-t}{[ク]}\vec{a}+\frac{t}{[ク]}\vec{b} \quad \cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{1-[ケ]t}{[ク]}\vec{a}+\frac{[コ]-t}{[ク]}\vec{b} \quad \cdots\cdots②$$

である。

（次ページに続く）

(2)　$0<t<1$ の範囲において，三角形 PQR の面積 S の最小値を求めよう。

点 P から線分 CD に引いた垂線と線分 QR の交点を T とする。三角形 PTQ と三角形 PTR の面積の和は S に等しいから，$S=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\text{PT}$ である。これにより，PT が最小になるときを考えればよいことがわかる。

まず，$\text{QT}:\text{TR}=(1-t):\boxed{\text{ス}}$ であるから

$$\overrightarrow{\text{PT}}=\boxed{\text{セ}}\,\overrightarrow{\text{PQ}}+\boxed{\text{ソ}}\,\overrightarrow{\text{PR}} \qquad \cdots\cdots③$$

である。$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪　t	①　$(1-t)$	②　$(1+t)$	③　$(1+2t)$
④　$\dfrac{t}{2}$	⑤　$\dfrac{1-t}{2}$	⑥　$\dfrac{1+t}{2}$	⑦　$\dfrac{1+2t}{2}$

したがって，①，②，③により

$$\overrightarrow{\text{PT}}=\left(\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}t^2-\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}t+\frac{3}{4}\right)(\vec{a}+\vec{b})$$

となる。よって，$t=\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ のとき，PT は最小になり，三角形 PQR の面積 S の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$ である。

[2] 座標空間において4点 $A(2,\ 0,\ 0)$, $B(1,\ 1,\ 0)$, $C(1,\ 0,\ 1)$, $D(x,\ y,\ z)$ を考える。

(1) 三つのベクトル $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ について

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=$ [ア] ……………………………①

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=$ [イ] ……………………………②

である。[ア], [イ] に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $x-y-1$	① $y-z-1$	② $z-x-1$
③ $x-y$	④ $y-z$	⑤ $z-x$
⑥ $x-y+1$	⑦ $y-z+1$	⑧ $z-x+1$

(2) $AB=BC=CA=\sqrt{\boxed{ウ}}$ により，三角形 ABC は正三角形である。以下，4点 A，B，C，D が，正四面体の四つの頂点になるとする。このときの x，y，z の値を求めよう。ただし，$x>1$ とする。

ベクトル $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ の大きさは，いずれも $\sqrt{\boxed{エ}}$ であり，どの二つのベクトルのなす角も [オカ]° である。よって，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=$ [キ] となる。このことと①，②および $|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DC}|=\sqrt{\boxed{エ}}$ により，

$(x,\ y,\ z)=($ [ク], [ケ], [コ] $)$ となる。

（次ページに続く）

(3)　$(x,\ y,\ z)=($ ク $,$ ケ $,$ コ $)$ のときを考える。線分 AB の中点を P，線分 DA を 1：2 に内分する点を Q，線分 DC を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を R とする。三角形 PQR の面積 S が最小になるときの t の値を求めよう。

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセ}}},\quad |\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\boxed{\text{ソ}}\,t^2-\boxed{\text{タ}}\,t+\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ のなす角を θ とすると，$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|\sin\theta$ なので

$$\begin{aligned}4S^2&=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2\sin^2\theta\\&=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2\cos^2\theta\\&=t^2-\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}t+\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}\end{aligned}$$

である。よって，S は $t=\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}$ のとき最小になる。

テキスト解答

【講義問題の略解】

※講義授業の内容を補完するものです．記述式の試験の答案を想定したものとはなっておりません．ご了承ください．

第１講　指数関数・対数関数・図形と方程式

1 (1)　$X=2^x$ とおくと，$X>0$　(①)

$4^{x+a}=4^a\cdot4^x=(2^2)^a\cdot(2^2)^x=2^{2a}\cdot(2^x)^2$，$2^{x+a}=2^a\cdot2^x$ より，

$$4^{x+a}-2^{x+a}+a=0 \quad \cdots\cdots① \iff 2^{2a}\cdot(2^x)^2-2^a\cdot2^x+a=0$$

よって，①を X を用いて表すと，$2^{2a}X^2-2^aX+a=0$　……②となる．

X の２次方程式の判別式を D とすると，$D=(2^a)^2-4\cdot2^{2a}\cdot a=2^{2a}(\mathbf{1-4}a)$ である．

(2)　$a=\dfrac{1}{4}$ のとき，$D=0$ であり，このとき②の解は，$X=\dfrac{2^{a-1}}{2^{2a}}=2^{-a-1}=2^{-\frac{5}{4}}$

よって，②は $X>0$ の範囲にただ一つの解をもつ．

$X=2^{-\frac{5}{4}}$ より，$2^x=2^{-\frac{5}{4}}$　したがって，①もただ一つの解 $x=-\mathbf{\dfrac{5}{4}}$ をもつ．

(3)　$a\neq\dfrac{1}{4}$ のとき，$f(X)=2^{2a}X^2-2^aX+a$ とおくと，

$2^{2a}>0$ より，関数 $y=f(X)$ のグラフは，下に凸の放物線である．

②が $X>0$ の範囲でただ一つの解をもつのは，$y=f(X)$ のグラフが X 軸と $X>0$ の範囲でただ一つの共有点をもつときである．

$f(0)=0$，つまり $a=0$ のとき，

$$f(X)=X^2-X=X(X-1)$$

より，$y=f(X)$ のグラフは $X=0$，１において X 軸と交わり，適する．

$f(0)<0$，つまり $a<0$ のとき，

$y=f(X)$ のグラフは X 軸と $X<0$，$X>0$ で交わり，適する．

よって，②が $X>0$ の範囲でただ一つの解をもつための必要十分条件は，$a\leqq0$　(③)

したがって，$a\leqq0$ のとき，②は２解

$$X=\frac{2^a\pm\sqrt{D}}{2\cdot2^{2a}}=\frac{2^a\pm\sqrt{(2^a)^2\cdot(1-4a)}}{2\cdot2^{2a}}=\frac{2^a\pm2^a\sqrt{1-4a}}{2\cdot(2^a)^2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2^{a+1}}$$ をもち，

$X>0$ の範囲にただ一つの解 $X=\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2^{a+1}}$ をもち，

$2^x=\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2^{a+1}}$ より，$x=\log_2\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2^{a+1}}=\log_2(1+\sqrt{1-4a})-\log_2 2^{a+1}$

したがって，$a\leqq0$ のとき①はただ一つの解 $x=\mathbf{-}a\mathbf{-1}+\log_2(\mathbf{1}+\sqrt{1-4a})$ をもつ．

2　$s=\log_2 x$，$t=\log_2 y$ のとき，$f(x)=\log_2 x$ のグラフを考えると，
$x>1$ において s のとり得る値の範囲は $s>\mathbf{0}$，t のとり得る値の範囲は実数全体である．

$$\log_2 A=\log_2 x\sqrt{y}=\log_2 x+\log_2 y^{\frac{1}{2}}=\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 y=s+\frac{t}{\mathbf{2}}$$

また，底の変換公式により，$\log_4 x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}=\dfrac{1}{2}s$　（⑤）

$(2y)^{\log_4 x}=16$ の両辺の 2 を底とする対数をとると，

$$\log_2(2y)^{\log_4 x}=\log_2 16 \iff \log_4 x\times\log_2 2y=4 \iff \frac{\log_2 x}{\log_2 4}\times(\log_2 2+\log_2 y)=4$$

よって，$\dfrac{1}{2}s\times(1+t)=4$ より，$s(t+\mathbf{1})=\mathbf{8}$　　これを変形して，$t=\dfrac{8}{s}-1$

このとき，$\log_2 A=s+\dfrac{t}{2}=s+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{s}-1\right)=s+\dfrac{\mathbf{4}}{s}-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

$s>0$，$\dfrac{4}{s}>0$ より，(相加平均)≧(相乗平均) から，

$$s+\frac{4}{s}-\frac{1}{2}\geqq 2\sqrt{s\times\frac{4}{s}}-\frac{1}{2}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

等号成立は，$s=\dfrac{4}{s}$，$s^2=4$，つまり $s=\mathbf{2}$ のとき．

このとき，$\log_2 x=2$　　よって，$x=2^2=\mathbf{4}$
また，$t=3$ より，$\log_2 y=3$　　よって，$y=2^3=\mathbf{8}$
したがって，A は $x=4$，$y=8$ のとき，最小値 $4\sqrt{8}=\mathbf{8}\sqrt{\mathbf{2}}$ をとる．

3　(1)　原点中心，半径 2 の円 C の方程式は，$x^2+y^2=2^2$　つまり　$x^2+y^2=\mathbf{4}$
A(4，3)，P(s，t)，Q(x，y) のとき，Q は AP を 2：1 に内分するので

$$x=\frac{1\cdot 4+2\cdot s}{2+1}=\frac{\mathbf{4}+\mathbf{2}s}{\mathbf{3}},\quad y=\frac{1\cdot 3+2\cdot t}{2+1}=\frac{\mathbf{3}+2t}{3}$$

よって，$s=\dfrac{3x-4}{2}$，$t=\dfrac{3y-3}{2}$ …①

また，点 P(s，t) は円 C 上の点より，$s^2+t^2=4$ …②

①を②に代入して，

$$\left(\frac{3x-4}{2}\right)^2+\left(\frac{3y-3}{2}\right)^2=4$$

$$\frac{(3x-4)^2}{4}+\frac{(3y-3)^2}{4}=4$$

$$\left\{3\left(x-\frac{4}{3}\right)\right\}^2+\{3(y-1)\}^2=16$$

$$9\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+9(y-1)^2=16 \qquad \text{ゆえに，}\left(x-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)^2+(y-\mathbf{1})^2=\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)^2$$

よって，点 Q の軌跡は $\left(\dfrac{4}{3},\ 1\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{4}{3}$ の円である．これを C' とする．

(2) 円 C：$x^2+y^2-4=0$ と円 C'：$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+(y-1)^2-\frac{16}{9}=0$ の二つの交点を通る図形は，$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+(y-1)^2-\frac{16}{9}+k(x^2+y^2-4)=0$（$k$ は実数）と表される．

これが直線を表すのは $k=-1$ のときで，このとき

$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+(y-1)^2-\frac{16}{9}-(x^2+y^2-4)=0$$

であり，これは，円 C と円 C' の二つの方程式の差をとったものである．

これを整理すると，

$$x^2-\frac{8}{3}x+\frac{16}{9}+y^2-2y+1-\frac{16}{9}-x^2-y^2+4=0$$

よって，$\mathbf{8}x+\mathbf{6}y=15$　　これが C と C' の 2 つの交点を通る直線 ℓ の方程式である．

また，O(0，0) と直線 ℓ：$8x+6y-15=0$ の距離は，

$$d=\frac{|8\cdot0+6\cdot0-15|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{|-15|}{10}=\frac{15}{10}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

である．

C と C' の 2 つの交点を B，C とすると，OB，OC はともに円 C の半径であることから △OBC は OB＝OC＝2 の二等辺三角形であり，O から BC に垂線を下ろすと，その長さは d である．

三平方の定理より，$\sqrt{2^2-d^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$　　よって，$\mathrm{BC}=2\times\frac{\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}$

したがって，△OBC の面積 S は，$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{3}{2}=\mathbf{\frac{3\sqrt{7}}{4}}$

第２講　三角関数

1 (1)　$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq -\alpha \leqq 0$　　よって，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \beta-\alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$

よって，$\beta-\alpha=\theta$ とおくと，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

$2\cos^2(\beta-\alpha)=3\sin(\beta-\alpha)$ より，$2\cos^2\theta=3\sin\theta$　　$2(1-\sin^2\theta)=3\sin\theta$

$t=\sin(\beta-\alpha)=\sin\theta$ とおくと，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$-1 \leqq t \leqq 1$

$2(1-t^2)=3t$　　$2t^2+3t-2=0$　　$(2t-1)(t+2)=0$　　よって，$t=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

つまり，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$　　したがって，$\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{\boldsymbol{6}}$

(2)　(1)より，$\beta=\alpha+\dfrac{\pi}{6}$ であるから，

$$\begin{aligned}
y&=4\sin^2\beta-4\cos^2\alpha=4\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-4\cos^2\alpha\\
&=4\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}\right)^2-4\cos^2\alpha\\
&=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\right)^2-4\cos^2\alpha\\
&=3\sin^2\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha\\
&=3(1-\cos^2\alpha)+2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha=\mathbf{3}-\mathbf{6}\cos^2\alpha+\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}\sin\alpha\cos\alpha
\end{aligned}$$

よって，$y=3$，つまり $3-6\cos^2\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha=3$ となるのは，

$\cos\alpha(\sqrt{3}\sin\alpha-3\cos\alpha)=0$ より，

$\cos\alpha=0$，または $\sqrt{3}\sin\alpha-3\cos\alpha=0$ のとき．

$\cos\alpha=0$ $\left(0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす α は，$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

このとき，$\beta=\dfrac{2}{3}\pi$ より，$0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たさず，不適．

$\sqrt{3}\sin\alpha-3\cos\alpha=0$ より，$\sqrt{3}\sin\alpha=3\cos\alpha$　　$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

つまり，$\tan\alpha=\sqrt{3}$ $\left(0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ より，$\alpha=\dfrac{\pi}{\boldsymbol{3}}$

このとき，$\beta=\dfrac{\pi}{\boldsymbol{2}}$ $\left(0 \leqq \beta \leqq \dfrac{\pi}{2}\text{ を満たす}\right)$

(3)　$y=3-6\cos^2\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha$

$$\begin{aligned}
&=3-6\cdot\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+\sqrt{3}\sin 2\alpha=\sqrt{\mathbf{3}}\sin 2\alpha-\mathbf{3}\cos 2\alpha\\
&=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{\mathbf{3}}\right)
\end{aligned}$$

$y=-\sqrt{3}$ となるのは，$-\sqrt{3}=2\sqrt{3}\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$　　$\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ より，$0 \leqq 2\alpha \leqq \pi$　　$-\frac{\pi}{3} \leqq 2\alpha - \frac{\pi}{3} \leqq \frac{2}{3}\pi$

よって，$2\alpha - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$ より，$\alpha = \frac{\pi}{\mathbf{12}}$

このとき，$\beta = \frac{\pi}{\mathbf{4}}$ $\left(0 \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2}\right.$ を満たす$\left.\right)$

2 (1)　$p = \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = \sin\theta\cos\frac{2}{3}\pi + \cos\theta\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sin\theta + \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\cos\theta$

$q = \sin\left(\theta + \frac{4}{3}\pi\right) = \sin\theta\cos\frac{4}{3}\pi + \cos\theta\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sin\theta - \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\cos\theta$

(2)　$pq = \frac{1}{4}\sin^2\theta - \frac{3}{4}\cos^2\theta = \frac{1}{4}\sin^2\theta - \frac{3}{4}(1 - \sin^2\theta) = \sin^2\theta - \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$

$= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cos 2\theta - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

(3)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，$0 \leqq 2\theta < 4\pi$

$pq = 0$ より，$-\frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{4} = 0$　　$\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$

$0 \leqq 2\theta < 4\pi$ より，$2\theta = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{8}{3}\pi,\ \frac{10}{3}\pi$

よって，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で $pq = 0$ を満たす θ は $\theta = \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi$ の **4** 個であり，そのうち最小のものは $\theta = \frac{\pi}{\mathbf{3}}$ である．

(4)　$r = \sin\theta$ とおくとき，

$p + q = \left(-\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) + \left(-\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) = -\sin\theta = -r$

$pq = \sin^2\theta - \frac{3}{4} = r^2 - \frac{3}{4}$

よって，$p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq = (-r)^2 - 2\left(r^2 - \frac{3}{4}\right) = -r^2 + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

このとき，$A = \frac{q}{p} + \frac{p}{q} = \frac{p^2 + q^2}{pq} = \frac{-r^2 + \frac{3}{2}}{r^2 - \frac{3}{4}}$ より，

$$A = -4 \iff \frac{-r^2 + \frac{3}{2}}{r^2 - \frac{3}{4}} = -4 \iff -r^2 + \frac{3}{2} = -4\left(r^2 - \frac{3}{4}\right)$$

$r^2 = \frac{1}{2}$　　$r = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$　つまり　$\sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{3}$ より，$\theta = \frac{\pi}{\mathbf{4}}$

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，$p=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{3}\pi\right)=\sin\dfrac{11}{12}\pi$

$$\frac{5}{6}\pi<\frac{11}{12}\pi<\pi \text{ より，} 0<p<\frac{1}{2}$$

$$q=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4}{3}\pi\right)=\sin\frac{19}{12}\pi$$

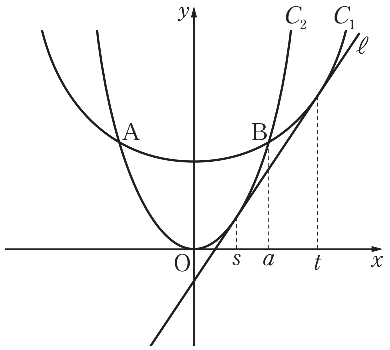
$$\frac{3}{2}\pi<\frac{19}{12}\pi<\frac{5}{3}\pi \text{ より，} -1<q<-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって，$q<p<r$　（②）

第３講　微分法・積分法

1 (1) C_1 と C_2 の方程式を連立して



$3x^2=2x^2+a^2$ より $x^2=a^2$

$a>0$ より $x=\pm a$　　よって $\mathrm{B}(a,\ 3a^2)$

C_1：$y=3x^2$ において $y'=6x$

よって $x=s$ における C_1 の接線の方程式は

$y=6s(x-s)+3s^2$　つまり $y=6sx-3s^2$

C_2：$y=2x^2+a^2$ において $y'=4x$

よって $x=t$ における C_2 の接線の方程式は

$y=4tx(x-t)+2t^2+a^2$　つまり $y=4tx-2t^2+a^2$

この２接線が一致するとき $6s=4t$ …①，$-3s^2=-2t^2+a^2$ …②

①より $t=\dfrac{3}{2}s$　これを②に代入して整理すると $s^2=\dfrac{2}{3}a^2$

C_1 と ℓ は第１象限で接するので $s>0$　　よって $s=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$　　このとき $t=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$

放物線 C_1 の $s\leqq x\leqq a$ の部分，放物線 C_2 の $a\leqq x\leqq t$ の部分，x 軸，および２直線 $x=s$，$x=t$ で囲まれた部分の面積は

$$\int_s^a 3x^2dx+\int_a^t(2x^2+a^2)dx$$

$$=\Big[x^3\Big]_s^a+\Big[\frac{2}{3}x^3+a^2x\Big]_a^t=a^3-s^3+\left(\frac{2}{3}t^3+a^2t\right)-\left(\frac{2}{3}a^3+a^3\right)$$

$$=-s^3+\frac{2}{3}t^3+a^2t-\frac{2}{3}a^3$$

$$=-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^3+\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^3+\frac{\sqrt{6}}{2}a^3-\frac{2}{3}a^3=\left(-\frac{2\sqrt{6}}{9}+\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{2}{3}\right)a^3$$

$$=\frac{7\sqrt{6}-6}{9}a^3$$

(2) (1)より $\mathrm{A}(-a,\ 3a^2)$，$\mathrm{B}(a,\ 3a^2)$

$f(x)=x^3+px^2+qx+r$ のグラフが原点を通るので，$r=0$

よって $f(x)=x^3+px^2+qx$

また，$y=f(x)$ が点A，Bを通るので

$-a^3+pa^2-qa=3a^2$ …③　　$a^3+pa^2+qa=3a^2$ …④

③＋④より $2pa^2=6a^2$　　$a>0$ より $p=3$

また，$f'(x)=3x^2+2px+q=3x^2+6x+q$ であり，$f(x)$ が $x=-4$ で極値をとることから $f'(-4)=0$　　よって $48-24+q=0$ より $q=-24$

このとき $f(x)=x^3+3x^2-24x$，$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$

したがって，$y=f(x)$ は $x=2$ で極小値 $f(2)=8+12-48=-28$ をとる。

また④より，$a^3+3a^2-24a=3a^2$　　$a(a^2-24)=0$　　$a>0$ より $a=2\sqrt{6}$

$y=f(x)$ と $C_2：y=2x^2+24$ を連立すると

$x^3+3x^2-24x=2x^2+24$

$x^3+x^2-24x-24=0$

$(x+1)(x^2-24)=0 \qquad x=-1,\ \pm 2\sqrt{6}$

したがって，曲線 $y=f(x)$ と放物線 C_2 の共有点のうち，A，B と異なる点の座標は $(-1,\ 26)$

2 (1) $f(x)=x^3-5x^2+3x-4$ より，$f'(x)=\mathbf{3}x^2-\mathbf{10}x+\mathbf{3}=(3x-1)(x-3)$

よって，$f(x)$ は $x=\mathbf{\frac{1}{3}}$ で極大値，$x=\mathbf{3}$ で極小値をとる．

極小値は $f(3)=-13$ であり，

$f(x)=-13$ より，$x^3-5x^2+3x+9=0 \quad (x+1)(x-3)^2=0 \quad x=-1,\ 3$ である．

したがって，$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値は，$f(3)=\mathbf{-13}$

また，$f(x)=x^2(x-5)+3x-4$ より，$f\left(\frac{1}{3}\right)<0$

よって，極大値が負であることより，方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数は **1** 個である．

(2) $f'(0)=3,\ f(0)=-4$ より，

$y=f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線 ℓ の方程式は，$y=\mathbf{3}x-\mathbf{4}$

放物線 $C：y=x^2+px+q$ と直線 ℓ の接点の x 座標が $x=a$ であるとき，

$x=a$ における C の接線の傾きが直線 ℓ の傾きと一致することから，

$y'=2x+p$ より，$2a+p=3 \qquad$ よって，$p=\mathbf{-2}a+\mathbf{3}$

$x=a$ における C と ℓ の y 座標が一致することから，

$a^2+pa+q=3a-4$，つまり $a^2+(-2a+3)a+q=3a-4$ より，$q=a^2-\mathbf{4}$

(3) $g(x)=x^2+px+q$ のとき，題意より，

$g(0)g(1)=q(1+p+q)=(a^2-4)(a^2-2a)=a(a+\mathbf{2})(a-\mathbf{2})^2<0$

$(a-2)^2 \geqq 0$ より，$a(a+2)<0 \qquad$ よって，$\mathbf{-2}<a<\mathbf{0}$ であり，

$g(0)<0$ (⓪)，$g(1)>0$ (②)である．

また，題意の面積 S と T について，

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^\beta g(x)dx+\int_\beta^1 g(x)dx=T-S \quad (⑤)$$

$S=T$ のとき，$T-S=0$　つまり　$\int_0^1 g(x)dx=0$

$$\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{p}{2}x^2+qx\right]_0^1=0 \qquad \frac{1}{3}+\frac{p}{2}+q=0$$

よって，$\frac{1}{3}+\frac{-2a+3}{2}+a^2-4=0 \qquad 6a^2-6a-13=0$

$-2<a<0$ より，$a=\mathbf{\frac{3-\sqrt{87}}{6}}$

第４講　数列

1 $a_1=\frac{1}{2}$, $a_{n+1}=\frac{2a_n+s}{a_n+2}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　……………①

(1)　$s=4$ のとき．$a_{n+1}=\frac{2a_n+4}{a_n+2}=\frac{2(a_n+2)}{a_n+2}=2$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

したがって，$a_2=\mathbf{2}$，$a_{100}=\mathbf{2}$

(2)　$s=0$ のとき．$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$

両辺の逆数をとって，$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+2}{2a_n}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2}$

よって，$b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと，$b_1=\frac{1}{a_1}=\mathbf{2}$，$b_{n+1}=b_n+\mathbf{\frac{1}{2}}$

したがって，数列 $\{b_n\}$ は初項 2，公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列より，

$$b_n=2+(n-1)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}=\frac{n+3}{2}$$

$\frac{1}{a_n}=\frac{n+3}{2}$ より，$a_n=\mathbf{\frac{2}{n+3}}$

(3)　$s=1$ のとき．$a_{n+1}=\frac{2a_n+1}{a_n+2}$

$c_n=\frac{1+a_n}{1-a_n}$ とおくと，$c_1=\frac{1+a_1}{1-a_1}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2+1}{2-1}=\mathbf{3}$

また，$c_{n+1}=\frac{1+a_{n+1}}{1-a_{n+1}}=\frac{1+\frac{2a_n+1}{a_n+2}}{1-\frac{2a_n+1}{a_n+2}}$

$$=\frac{(a_n+2)+(2a_n+1)}{(a_n+2)-(2a_n+1)}=\frac{3a_n+3}{-a_n+1}=3\cdot\frac{1+a_n}{1-a_n}=3c_n$$

したがって，数列 $\{c_n\}$ は初項 3，公比 3 の等比数列より，$c_n=3\cdot3^{n-1}=3^n$

$\frac{1+a_n}{1-a_n}=3^n$ より，$1+a_n=3^n(1-a_n)$

$(3^n+1)a_n=3^n-1$　　よって，$a_n=\frac{3^n-1}{3^n+1}=\frac{(3^n+1)-2}{3^n+1}=\mathbf{1}-\mathbf{\frac{2}{3^n+1}}$　(②)

(4)　$c_n=3^n$ のとき．$c_nc_{n+1}=3^n\cdot3^{n+1}=3^{2n+1}=3\cdot(3^2)^n=3\cdot9^n=27\cdot9^{n-1}$

よって，数列 $\{c_nc_{n+1}\}$ は初項 27，公比 9 の等比数列より，

$\sum_{k=1}^{n}c_kc_{k+1}$ は，等比数列 $\{c_nc_{n+1}\}$ の初項から第 n 項までの和である．

したがって，$\sum_{k=1}^{n}c_kc_{k+1}=\frac{27(9^n-1)}{9-1}=\mathbf{\frac{27}{8}}(\mathbf{9}^n-1)$

次に，$s=1$ のとき，(3)より，$a_n=1-\frac{2}{3^n+1}$

また，① $\iff$ $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{a_n+2}$ $\iff$ $a_{n+1}(a_n+2)=2a_n+1$

$a_na_{n+1}+2a_{n+1}=2a_n+1$　よって　$a_na_{n+1}=\mathbf{2}(a_n-a_{n+1})+\mathbf{1}$

このとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_ka_{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\{2(a_k-a_{k+1})+1\}$

$$
\begin{aligned}
&=2(a_1-a_2)+1\\
&\quad+2(a_2-a_3)+1\\
&\quad+2(a_3-a_4)+1\\
&\qquad\vdots\\
&\quad+2(a_n-a_{n+1})+1\\
&=2(a_1-a_{n+1})+1\times n=2\left\{\frac{1}{2}-\left(1-\frac{2}{3^{n+1}+1}\right)\right\}+n
\end{aligned}
$$

ゆえに，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_ka_{k+1}=n-1+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3^{n+1}+1}}$　（①，③）

2　$(n+1)a_{n+2}-(3n+2)a_{n+1}+2na_n=4n+2$　……………①

(1)　①で $n=1$ のとき，$2a_3-5a_2+2a_1=6$ より，$2a_3-5\cdot4+2\cdot1=6$

よって，$a_3=\mathbf{12}$

(2)　$(n+1)(a_{n+2}-\alpha a_{n+1})-n(a_{n+1}-\alpha a_n)$

$=(n+1)a_{n+2}-\{\alpha(n+1)+n\}a_{n+1}+\alpha na_n$

これが①の左辺と等しいのは，$\alpha=2$ のとき．

したがって，①は $(n+1)(a_{n+2}-\mathbf{2}a_{n+1})-n(a_{n+1}-2a_n)=4n+2$ と変形することができる．

$b_n=n(a_{n+1}-2a_n)$ とおくと，$b_{n+1}-b_n=4n+2$

よって，$\{b_n\}$ の階差数列は初項 **6**，公差 **4** の等差数列であり，$b_1=1\cdot(a_2-2a_1)=2$ より，

$n\geqq2$ のとき，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+2)=2+\frac{(n-1)\{6+4(n-1)+2\}}{2}=\mathbf{2n^2}\quad(n=1\text{ のときも成立})$$

ゆえに，$n(a_{n+1}-2a_n)=2n^2$ より，$a_{n+1}-2a_n=\dfrac{1}{n}\cdot2n^2$ ……………②

よって，$a_{n+1}-2a_n=2n$ ……………③

$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(n+1)$ ……………④

④－③より，$a_{n+2}-a_{n+1}-2(a_{n+1}-a_n)=2$

$c_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$c_{n+1}-2c_n=\mathbf{2}$

よって，$c_{n+1}=2c_n+2$ ……………⑤

$\beta=2\beta+2$ ……………⑥

⑤－⑥より，$c_{n+1}-\beta=2(c_n-\beta)$ であり，⑥より，$\beta=-2$

よって，$c_{n+1}+\mathbf{2}=2(c_n+2)$，$c_1+2=(a_2-a_1)+2=5$ であることより，

数列 $\{c_n+2\}$ は初項 **5**，公比 2 の等比数列.

よって，$c_n+2=5\cdot 2^{n-1}$　つまり　$c_n=5\cdot 2^{n-1}-2$

したがって，$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(5\cdot 2^{k-1}-2)=1+\frac{5(2^{n-1}-1)}{2-1}-2(n-1)$$

$$=\mathbf{5\cdot 2^{n-1}-2n-2}$$　（$n=1$ のときも成立）（①）

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(5\cdot 2^{k-1}-2k-2)=\frac{5(2^n-1)}{2-1}-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-2n$$

$$=\mathbf{5\cdot 2^n-n^2-3n-5}$$　（②）

第５講　ベクトル

1 (1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=1^2=1$，つまり $|\vec{a}-\vec{b}|^2=\mathbf{1}$ より，$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ より，$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=1$　　よって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ すると，四角形 OAEB はひし形より，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

また，正方形 ABCD より，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　よって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

すなわち，$\vec{a}+\vec{b}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

また，$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+2\times\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=4$ より，$|\vec{a}+\vec{b}|=\mathbf{2}$

これと $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=1$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}(\vec{a}+\vec{b})$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1-t)\vec{a}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1-t)\vec{a}+\frac{1}{2}t(\vec{a}+\vec{b})=\mathbf{\frac{2-t}{2}}\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{b}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{BC}}-t\vec{a}=\vec{b}+(1-t)\times\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-t\vec{a}$$

$$=\frac{\mathbf{1-3}t}{2}\vec{a}+\frac{\mathbf{3}-t}{2}\vec{b}$$

(2) $\triangle$PTQ と $\triangle$PTR において，線分 PT を底辺としたときの高さをそれぞれ h_1，h_2 とすると，

$$S=\triangle\mathrm{PTQ}+\triangle\mathrm{PTR}=\frac{1}{2}\times\mathrm{PT}\times h_1+\frac{1}{2}\times\mathrm{PT}\times h_2=\frac{1}{2}\times\mathrm{PT}\times(h_1+h_2)=\mathbf{\frac{1}{2}}\mathrm{PT}$$

OE と QR の交点を F とすると，QF：FR＝1：1

また，AD $/\!/$ PT $/\!/$ OF より，QT：TF＝AP：PO＝$(1-t)$：t

よって，QT：TR＝$(1-t)$：$(1+t)$　(②)

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{PT}}=\frac{1+t}{(1-t)+(1+t)}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\frac{1-t}{(1-t)+(1+t)}\overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

$$=\frac{1+t}{2}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\frac{1-t}{2}\overrightarrow{\mathrm{PR}}\quad(⑥,\ ⑤)$$

$$=\frac{1+t}{2}\left(\frac{2-t}{2}\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}\right)+\frac{1-t}{2}\left(\frac{1-3t}{2}\vec{a}+\frac{3-t}{2}\vec{b}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{4}t+\frac{3}{4}\right)\vec{a}+\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{4}t+\frac{3}{4}\right)\vec{b}=\left(\mathbf{\frac{1}{2}}t^2-\mathbf{\frac{3}{4}}t+\frac{3}{4}\right)(\vec{a}+\vec{b})$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PT}}|=\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{4}t+\frac{3}{4}\right)|\vec{a}+\vec{b}|=\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{4}t+\frac{3}{4}\right)\times2=t^2-\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}$$

$t^2-\dfrac{3}{2}t+\dfrac{3}{2}=\left(t-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{15}{16}$ より，$t=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{PT}}|$ すなわち PT は最小値 $\dfrac{15}{16}$ をとり，このとき S は最小値 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{15}{16}=\mathbf{\dfrac{15}{32}}$ をとる．

2 (1) $\overrightarrow{DA}=(2-x,\ -y,\ -z)$，$\overrightarrow{DB}=(1-x,\ 1-y,\ -z)$，$\overrightarrow{DC}=(1-x,\ -y,\ 1-z)$

より，

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=(2-x)(1-x)-(1-x)^2+(-y)(1-y)-(1-y)(-y)+(-z)^2-(-z)(1-z)$

$=z-x+1$ （⑧）　……………①

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=(1-x)^2-(1-x)(2-x)+(1-y)(-y)-(-y)^2+(-z)(1-z)-(1-z)(-z)$

$=x-y-1$ （⓪）　……………②

(2) $\mathrm{AB}=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$，$\mathrm{BC}=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\mathrm{CA}=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{\mathbf{2}}$

4点A，B，C，Dが正四面体の四つの頂点となるとき，

$|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DC}|=\sqrt{\mathbf{2}}$ であり，

$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$ のどの二つのベクトルのなす角も $\mathbf{60}^\circ$

よって，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos 60^\circ=\mathbf{1}$

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=0$ より，①から，$z-x+1=0$　つまり　$z=x-1$

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=0$ より，②から，$x-y-1=0$　つまり　$y=x-1$

よって，$\overrightarrow{DA}=(2-x,\ 1-x,\ 1-x)$

$|\overrightarrow{DA}|=\sqrt{2}$ より，$(2-x)^2+(1-x)^2+(1-x)^2=(\sqrt{2})^2$　　$3x^2-8x+4=0$

したがって，$x=2(>1)$ より，$(x,\ y,\ z)=(\mathbf{2},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1})$

(3) $(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 1)$ のとき，題意の点P，Q，Rについて

$$\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right),\ \mathrm{Q}\left(2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ \mathrm{R}(2-t,\ 1-t,\ 1)$$

$\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6}(3,\ 1,\ 4)$ より，$|\overrightarrow{PQ}|^2=\frac{1}{6^2}(3^2+1^2+4^2)=\frac{26}{36}=\mathbf{\frac{13}{18}}$

$\overrightarrow{PR}=\left(\frac{1}{2}-t,\ \frac{1}{2}-t,\ 1\right)$ より，$|\overrightarrow{PR}|^2=\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+1^2=\mathbf{2}t^2-\mathbf{2}t+\mathbf{\frac{3}{2}}$

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}-3t+\frac{1}{2}-t+4\right)=\frac{1}{6}(6-4t)=1-\frac{2}{3}t$$

よって，$4S^2=|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2-|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2\cos^2\theta$

$=|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2-(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR})^2$

$=\frac{13}{18}\left(2t^2-2t+\frac{3}{2}\right)-\left(1-\frac{2}{3}t\right)^2$

$=t^2-\mathbf{\frac{1}{9}}t+\mathbf{\frac{1}{12}}=\left(t-\frac{1}{18}\right)^2-\frac{1}{18^2}+\frac{1}{12}$

$0<t<1$ より，$4S^2$ は $t=\mathbf{\frac{1}{18}}$ のとき最小となり，$S>0$ より S も最小となる．

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。